3e – Calcul littéral – Connaissances

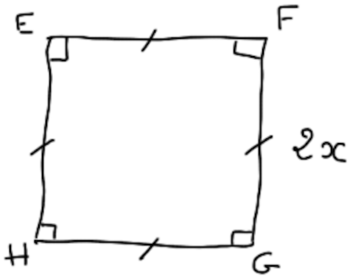
- *Produire une expression littérale*
- *Évaluer une expression littérale*
- *Transformer une expression littérale (développer, réduire, factoriser)*
- *Utiliser une identité remarquable*

1. Produire une expression littérale

Une expression littérale contient un ou plusieurs **nombres variables** représentés par des **lettres** et permet d'exprimer une **relation générale**.

> « L'algèbre fit un bond prodigieux grâce aux mathématiciens français François Viète (1540-1603) et Albert Girard (1595-1632), qui ont divulgué le calcul littéral : au lieu de poser et résoudre un problème en langage courant, ce qui devient vite lourd, ils utilisèrent des chiffres et des lettres. »

On les rencontre souvent dans des **programmes de calcul**, dans des **situations géométriques**…



L'aire du carré EFGH est $A_{EFGH} = 2x \times 2x = 4x^2$.
Son **périmètre** est $P_{EFGH} = 4 \times 2x = 8x$.

Inutile de mettre une unité après une expression littérale

2. Évaluer une expression littérale

Évaluer une expression, c'est la **calculer** pour une **valeur donnée** de la variable.

Si on choisit de fixer la variable à $x = 3\ cm$, alors l'aire du carré $EFGH$ est :
$A_{EFGH} = 4 \times 3^2 = 4 \times 3 \times 3 = 36\ cm^2$.
Son périmètre est $P_{EFGH} = 8 \times 3 = 24\ cm$.

Il est nécessaire de remettre les symboles opératoires (×) dans le calcul et les unités si besoin.

3. Transformer une expression littérale

Ce sont des techniques essentielles en mathématiques : les différentes formes d'une même expression littérale sont utiles selon le contexte.

a. Produit ou somme ?

C'est une question essentielle à se poser devant chaque expression littérale.
Par exemple :

- $x^2 + 5x$ est la **somme** de deux **termes**, x^2 et $5x$.
- $x \times (2x - 7)$ est le **produit** de deux **facteurs**, $\boldsymbol{x}$ et $2x - 7$.

b. Réduire une expression littérale

C'est effectuer les calculs possibles, regrouper les termes de même nature, ôter les symboles inutiles.

L'expression $2 \times x^2 + 5 - 3 \times x + 7 \times x^2 - 10 \times x - 3$ (qui est une somme) contient :

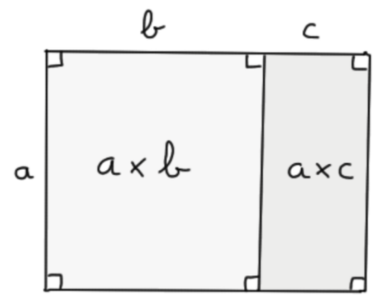
- **Trois « familles » de termes** : la famille des x^2, celle des x et celle des nombres fixés ;
- Des symboles que l'on peut retirer.

Alors $\boxed{2 \times x^2} + 5 - 3 \times x + \boxed{7 \times x^2} - 10 \times x - 3 = \boxed{2x^2 + 7x^2} - 3x - 10x + 5 - 3 = \mathbf{9x^2 - 13x + 2}$

Le symbole = signifie ici « est toujours égal à, quelle que soit la valeur de la variable x ».

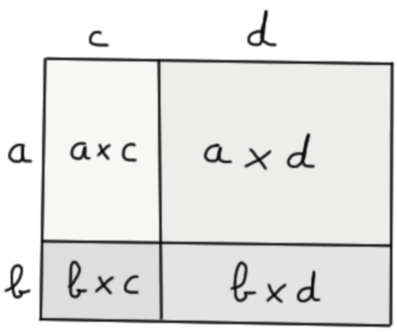
c. Développer une expression littérale : produit ⟶ somme/différence

i. Simple distributivité



Pour tous nombres a, b et c : $\underbrace{\boxed{\boldsymbol{a\times(b+c)}}}_{\text{produit}}=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{a\times b+a\times c}}}_{\text{somme}}$

ii. Double distributivité



Pour tous nombres a, b, c et d :

$\underbrace{\boxed{\boldsymbol{(a+b)\times(c+d)}}}_{\text{produit}}=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{a\times c+a\times d+b\times c+b\times d}}}_{\text{somme}}$

d. Factoriser : somme/différence ⟶ produit

i. Utiliser un facteur commun

$$\boxed{a}\times b+\boxed{a}\times c=\boxed{a}\times(b+c)$$

Exemples :

$x\times 3+x\times 7=x\times(3+7)=x\times 10=10x$; $x(\boldsymbol{x+1})-2(\boldsymbol{x+1})=(\boldsymbol{x+1})(x-2)$.

ii. Utiliser une identité remarquable : Différence de deux carrés

Propriété : Pour tous nombres a et b, alors $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Preuve : Pour tous nombres a et b, $(a+b)(a-b)=a\times a-a\times b+b\times a-b\times b=a^2-b^2$.

Exemples :

- $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$
- $4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x+3)(2x-3)$
- $x^2-7=x^2-\sqrt{7}^2=(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$
- $2x^2-3=\left(\sqrt{2}x\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)$